Если $X=x^iA_i\in G_{n-1}$ -текущая точка характеристического элемента H^* гиперплоскости G_{n-1}, то H^* определяется уравнениями

$$H^*:\ x^0=0,\quad x^iA^0_{i\sigma}=0. \tag{14}$$

В соответствии с [1, с.213] заключаем, с учетом (12) и (13), что в аффинном расслоении $A_{m,n}$, базой которого является m-поверхность S_m, а слоем, соответствующим точке $A_0\in S_m$, служит центропроективное пространство $P_n=A_0\cup G_{n-1}$, локально изоморфное n-мерному аффинному пространству, определяется аффинная связность C^m с формами, удовлетворяющими структурным уравнениям

$$\Omega^\alpha=\omega^\alpha_0,\quad \Omega^j_i=\omega^j_i-\delta^j_i\,\omega^0_0,$$
$$D\Omega^\alpha=\Omega^\gamma\wedge\Omega^\alpha_\gamma,\quad D\Omega^j_i=\Omega^k_i\wedge\Omega^j_k+R^j_{i\alpha\beta}\Omega^\alpha\wedge\Omega^\beta, \tag{15}$$

где компоненты тензора кривизны $R^j_{i\alpha\beta}$ определяются по формулам

$$R^j_{i\alpha\beta}=-\frac{1}{2}\delta^j_{[\alpha}A^0_{|i|\beta]}+\frac{1}{2}\delta^j_iA^0_{[\beta\alpha]}. \tag{I6}$$

Из (14)-(16) и (11) вытекает следующая

Т е о р е м а 2. Линейные подпространства L_m и H^* в каждой точке $A_0\in S_m$ неподвижны при аффинных преобразованиях $R(v,w)$, $\forall v\in L_m, \forall w\in L_m$. Нормаль $P_r=A_0\cup H^*$ к S_m в точке A_0 в общем случае, т.е. в случае, когда $\dim H^*=n-m-1$, и только она является единственной основной нормалью в аффинной связности C^m.

Библиографический список

I. Н о р д е н А.П. Пространство аффинной связности. М., I976.

2. И в л е в Е.Т. Об одной нормализации многомерной поверхности пространства проективной связности//Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Сб. науч. тр./Калинингр. ун-т. Калининград, I974. Вып. 4. С. 6-28.

3. Л а п т е в Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий//Тр. Моск. математ. о-ва. М., I953. Т. 2. С. 275-382.

4. И в л е в Е.Т. О тангенциально-вырожденных расслоениях $P_{m,n}$ //Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Сб. науч. тр./ Калинингр. ун-т. Калининград, I984. Вып. I5. С. 32-37.

5. И в л е в Е.Т., Исабеков М.Б. К проективной геометрической интерпретации некоторых образов, определяемых двухвалентными тензорами//Материалы третьей научной конференции по математике и механике /Томский ун-т. Томск. I973. Вып. I. С. 50-52.

6. И в л е в Е.Т. Об одном аналоге тензора Риччи расслоения $P_{n,n}$ //Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Сб. науч. тр./ Калинингр. ун-т. Калининград, I985. Вып. I6. С. 23-26.

УДК 514.75

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ОТОБРАЖЕНИЙ

С.В. К и р е е в а

(Московский автодорожный институт)

В данной работе рассматриваются свойства отображения $f:(\Omega\subset P_3)\to(\overline{\Omega}\subset P_3)$, которое имеет двумерное и одномерное распределения двойных линий.

1. В проективном пространстве P_3 заданы две диффеоморфные области $\Omega,\overline{\Omega}$ $(\Omega\cap\overline{\Omega}=\varnothing)$. Диффеоморфизм $f:\Omega\to\overline{\Omega}$ переводит точку $A\in\Omega$ в точку $B\in\overline{\Omega}$. Области $\Omega,\overline{\Omega}$ нормализованы [2] в смысле А.П.Нордена одним и тем же семейством гиперплоскостей:

$$A\to\Pi_2(A),\quad B\to\Pi_2(A),\quad B\notin\Pi_2(A).$$

Введенные нормализации определяют в областях $\Omega,\overline{\Omega}$ аффинные связности $\nabla,\overline{\nabla}$. Отображение f переводит сеть $\Sigma_3\subset\Omega$ в сеть $\overline{\Sigma}_3\subset\overline{\Omega}$. К областям $\Omega,\overline{\Omega}$ присоединены подвижные реперы $R^A=\{A,A_i\}$, $R^B=\{B,B_i\}$ $(i=1,2,3)$, где A_i, B_i -нормальные точки [2] касательных к линиям $\omega^i,\overline{\omega}^i$ сетей $\Sigma_3,\overline{\Sigma}_3$. Точки B,B_i в репере R^A имеют следующие представления:

$$\vec{B}=\vec{A}+\gamma^i\vec{A}_i,\quad \vec{B}_i=\gamma^j_i\vec{A}_j \qquad (i,j=1,2,3). \tag{1}$$

Из результатов работы [3] следует, что если относительные инварианты $\gamma^i_j=0$ $(i\neq j)$, а среди абсолютных инвариантов γ^i_i $(i=1,2,3)$ есть два одинаковых $\gamma^1_1=\gamma^2_2\neq\gamma^3_3$, то в области Ω существуют два распределения Δ_1,Δ_2 такие, что $\Delta_1(A)=(AA_3)$, $\Delta_2(A)=(AA_1A_2)$. Эти распределения характеризуются тем, что любая линия ℓ этих распределений - двойная [1], причем касательные к линиям ℓ и $\overline{\ell}=f(\ell)$ пересекаются в точках нормализующей плоскости $\Pi_2(A)$. В области $\overline{\Omega}$ возникают образы $\overline{\Delta}_1$, $\overline{\Delta}_2$ распределений Δ_1,Δ_2 в индуцированном отображении f_{*A}: $\overline{\Delta}_1(B)=(BB_3)$, $\overline{\Delta}_2(B)=(BB_1B_2)$.

В данной работе будем исследовать именно такое отооражение f .В той же статье [3] показано,что на прямой (AB) существуют инвариантные точки $N_i^i : \vec{N}_i^i = -\gamma_i^i \vec{A} + \vec{B}$. В нашем отображении f на прямой (AB) существуют две различные точки N_1^1, N_3^3, такие,что $(AB, N_1^1 N_3^3) = \gamma_3^3 / \gamma_1^1 \neq 1$. Если же сумма абсолютных инвариантов $\gamma_1^1 + \gamma_3^3 = 0$,то точки A, B, N_1^1, N_3^3 образуют гармоническую четверку: $(AB, N_1^1 N_3^3) = -1$.Пусть точка A смещается по направлению (AL), $L \neq A_3$, $L \notin (A_1 A_2)$,где $\vec{L} = \ell^i \vec{A}_i$,тогда точка B будет смещаться в направлении $B\bar{L}$,где $\vec{\bar{L}} = \ell^i \vec{B}_i = \gamma_1^1 (\ell^1 \vec{A}_1 + \ell^2 \vec{A}_2) + \gamma_3^3 \ell^3 \vec{A}_3$. Пусть $\ell^1 \vec{A}_1 + \ell^2 \vec{A}_2 = \vec{L}_{12}$,тогда $\vec{\bar{L}} = \gamma_1^1 \vec{L}_{12} + \ell^3 \gamma_3^3 \vec{A}_3$, $(A_3 L_{12}, L\bar{L}) = (AB, N_1^1 N_3^3)$. Отсюда следует

Т е о р е м а 1. При данном отображении f: 1)любое направление (AL) переходит в такое направление $(B\bar{L})$,что прямая $(L\bar{L})$ всегда проходит через точку A_3; 2)сложное отношение $(A_3 L_{12}, L\bar{L})$ всегда постоянно для любого направления (AL) и равно сложному отношению $(AB, N_1^1 N_3^3) = \gamma_3^3 / \gamma_1^1$.

С л е д с т в и е I. Отображение f любому направлению (AL) ставит в соответствие направление $(B\bar{L})$ такое,что $(AL_{12}, L\bar{L}) = -1$ тогда и только тогда,когда пара точек A, B разделяет гармонически пару точек N_1^1, N_3^3 .

2.Обозначим через $C: \vec{C} = \gamma^i \vec{A}_i$ точку пересечения прямой (AB) и нормализующей плоскости $\Pi_2(A)$. Будем предполагать, что $C \neq N_i^i$ $(\gamma_1^1 \neq 1, \gamma_3^3 \neq 1)$.

Из разложения дифференциалов dC, dN_1^1 следует,что точка N_1^1 трехмерной сети не описывает,так как линии ω^1, ω^2 имеют общую касательную $(N_1^1 C) = (AB)$. Но соприкасающиеся плоскости $\Pi_2(\omega^1_{N_1^1}) = (ACA_1)$; $\Pi_2(\omega^2_{N_1^1}) = (ACA_2)$ у этих линий разные.Линии $\omega^1_{N_1^1}$, $\omega^2_{N_1^1}$ в общем случае пространственные,они будут плоскими тогда и только тогда,когда соответственно линии ω^1, ω^2 сети Σ_3 -плоские,лежащие в плоскостях (ACA_1), (ACA_2). Линия $\omega^1_{N_1^1}$ будет прямая тогда и только тогда,когда точки C и A_1 совпадают: $\omega^1_{N_1^1} = (N_1^1 A_1) = (AB)$. Линия $\omega^3_{N_1^1}$ -пространственная.Плоскость (ACA_3) будет ее соприкасающейся плоскостью тогда и только тогда,когда линия ω^3 сети Σ_3 плоская,лежащая в плоскости (ACA_3).

Размерность подмногообразия (N_1^1) равна двум,т.к.существует направление (AC_{12}), $\vec{C}_{12} = \gamma^1 \vec{A}_1 + \gamma^2 \vec{A}_2$ смещения точки A ,при котором $d\vec{N}_1^1 = \theta \vec{N}_1^1$ и точка N_1^1 неподвижна.Размерность подмногообразия (N_3^3) равна 3.

Т е о р е м а 2. Пусть связность ∇ эквиаффинная,тогда связность $\bar{\nabla}$ будет эквиаффинной тогда и только тогда,когда направления (AA_1), (AA_3) и (AA_2), (AA_3) сопряжены относительно конуса Риччи связности ∇ .В этом случае направления (BB_1),(BB_3) и (BB_2),(BB_3) тоже сопряжены относительно своего конуса Риччи связности $\bar{\nabla}$ и между тензорами Риччи R_{ij}, $\bar{R}_{ij}$ существует линейная зависимость: $\bar{R}_{ij} = \gamma_j^j R_{ij}$.

Можно показать,что справедливы следующие теоремы.

Т е о р е м а 3. Прямая $(F_i^j, \bar{F}_i^j)$,соединяющая соответствующие псевдофокусы $F_i^j, \bar{F}_i^j$ $(i \neq 3)$ прямых (AA_i), (BB_i), пересекает прямую (AB) в инвариантной точке N_j^j тогда и только тогда,когда или точка $B \in (AA_i A_k)$, $(i, k \neq j)$, или образ точки A_i в корреляции K^1 проходит через вершину A_j .В этом случае псевдофокусы $F_i^j, \bar{F}_i^j$ $(i, j = 1, 2)$ соответствуют в гомографии,определенной парой реперов R^A и R^B .Корреляция K^1 точке $M(x_0)$ в плоскости $\Pi_2(A)$ ставит в соответствие прямую $K^1(M) : a^0_{ts} x_0^t y^s = 0$ $(t, s = 1, 2, 3)$,где $\omega^0_t = a^0_{ts} \omega^s$.

Т е о р е м а 4. Направлению (AA_3) в проективитете Бомпьяни-Пантази,определенном с помощью распределения Δ_2 ,будет соответствовать прямая $(A_1 A_3)$ пересечения плоскости распределения $(AA_1 A_2)$ с нормализующей плоскостью $\Pi_2(A)$ тогда и только тогда,когда псевдофокусы F_1^3, F_2^3 совпадают с нормальными точками направлений (AA_1) и (AA_2). В этом случае площадка $\Delta_2(A)$ переносится параллельно вдоль линии ω^3 .

Для проективитета Бомпьяни-Пантази,определенного с помощью распределения $\bar{\Delta}_2$, справедлива аналогичная теорема.

Библиографический список

1.Б а з ы л е в В.Т. Многомерные сети двойных линий // Дифференциальная геометрия многообразий фигур:Сб.науч.тр./ Калинингр.ун-т.Калининград.1975.Вып.6.С.19-25.

2.Н о р д е н А.П. Пространства аффинной связности.М.: Наука,1976.

3.К и р е е в а С.В. О паре сетей //Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Сб.науч.тр./Калинингр.ун-т. Калининград,1983.Вып.14.С.26-31.